

KUD 327 : 338

**KRIZA FINANCIARE GLOBALE
POLITIKAT FINANCIARE, GABIMET DHE REFLEKSIONET**

*Dr. Sc. Artan Nimani³⁹
artannimani@gmail.com*

Abstrakt

Kriza e globale ekonomike e kohëve të fundit po shërben si justifikim për të lëshuar një fushatë anembanë botës kundër ekonomisë të tregut dhe sipërmarrjes së lirë si dhe si një motiv për të justifikuar një ndërhyrje më të madhe të shtetit në ekonomi. Kriza e tanishme, si dhe ajo e vitit 1929, filloi në fushën financiare (në Wall Street) dhe në shtetin më të fuqishëm të botës. Tregu i lirë po konsiderohet si përgjegjësi kryesor i kësaj krize ndërkohë që shkaktari kryesor ka qenë në fakt ndërhyrja e qeverisë në ekonomi. Kuptohet që babëzia ka luajtur rolin e vetë në këtë situatë dhe shumë bankierë e kanë mbështetur shtetin si dritë të gjelbër për të abuzuar akoma më tepër duke dhënë kredi bujare për shtëpi për individë që nuk kishin kolateral apo të ardhura të mjaftueshme. Po kështu ka pasur shumë individë të papërgjegjshëm që kanë kërkuar e marrë kredi për shtëpi njëmilionëshe më të ardhura minimale duke shpresuar që rritja e çmimeve do vijonte. Me pak fjalë analiza e krizës që po mbizotëron në mediat ndërkombëtare është e gabuar dhe për këtë arsye edhe zgjidhja e propozuar është e gabuar dhe e dëmshme. Shkaktari i kësaj krize ka qenë ndërhyrja e qeverisë në ekonomi me taktikat e promovuara nga promovuesit e rrugës së tretë dhe jo sistemi i tregut të lirë. Kostoja totale globale e kësaj krize do të arrijë deri në 4.1 trilionë Dollarë

Fjalet kyçe: Kriza, Globalizmi, Tregjet financiare , FMN, Fitimi, Humbja, Qeveritë, Bankat

Hyrje

Kriza aktuale ka përfshirë botën e me theks të veçantë, vendet më të zhvilluara, të atyre shteteve që kanë shumicën e brutoproduktit botëror dhe që kanë nivelin e lartë të jetesës.

Edhe ata që nuk janë ekspertë mund t'i përshkruajnë pasojat e krizës duke e parë realitetin që po shihet, por për atë se deri ku do të shkojë kjo krizë

³⁹ Autori është ligjerues i lëndëve: Mikorekonomi dhe Financa në FSHAB në Universitetin e Prishtinës si dhe lëndëve: Menaxhment dhe Financa e drejta Financiare në Kolegjin Universitar Biznesi, Prishtinë.

është e pamundur që të parashikosh. Edhe ekspertët më të mëdhenjë kanë hamendje dhe divergjenca të mëdha, por pajtohen me një gjë :

- efektet shkatërruese të kësaj krize do të jenë më të rënda se asnjë herë më parë dhe nuk mund të parashikohen.

Kohë të gjatë, në teorinë ekonomike botërore pati sunduar teoria e ligjeve të tregut të lirë. Me bindjen se tregu është rregullatori i të gjitha problemeve ekonomike. Tregu, si uji i lumit do e gjejë rrjedhën me të mirë dhe do të gjejë zgjidhjen e nevojshme më të mirën. Prandaj sa më pak barriera shtetërore tregut, sa më pak intervenime shtetërore dhe vetë tregu është një autorregullatore ekonomik. Ekonomia e tregut të lirë u bë model i zhvillimit dhe progresit ekonomik botëror, ajo kaloi barrierat kombëtare dhe u bë ligji i zhvillimit të mbarë ekonomisë botërore. Globalizmi dhe tregu i liri botëror u bënë parimet e zhvillimit dhe bashkëpunimit ndërkombëtar. Të gjithë organizmat ndërkombëtar, si Banka Botërore, shtetet e fuqishme ekonomike, parime të zhvillimit dhe bashkëpunimit vunë ekonominë e tregut të lirë dhe eliminimin e intervenimeve shtetërore. Sa më pak intervenim të shtetit sa më tepër liri veprimit të tregut- ky ishte parimi kryesor ndërkombëtar. Po jetojmë në një epokë financiare tragjike. Tregjet financiare dhe ekonomit bankare ne veqanti janë në një gjendje jo të mirë, tregjet amerikane të aksioneve ranë rreth 40%, me fjalë të tjera kjo kohë, ishte një ndër 5 momentet më të errëta që nga viti 1920. Para saj mund të renditen vetëm "shembja" e bursës së Wall Street në vitin 1929, kolapsi teknologjik i vitit 2000, kriza e vitit 1973 pas luftës së Yom Kippurit, ndërsa çmimi i naftës u katërfishua dhe kolapsi i famshëm i viteve 1937/'38, kur në Evropë po niste Lufta II Botërore

Në vitin 2000, edhe pse duket sikur fundi i botës ishte pas kthesës, ekonomia botërore shpëtoi thujtë e pacenuar. Sigurisht që u regjistruan recesione të vogla në Shtetet e Bashkuara, Evropë, apo Japoni.

Shumë më e vështirë ka qenë situata në krizat e viteve '30, apo '70, megjithatë bota ia doli mbanë. Për sa i përket krizës së fundit financiare, ajo i ka të gjitha shenjat të jetë shumë më e mprehtë dhe me më shumë pasoja. Rënia e çmimeve të aksioneve është më shumë një efekt anësor i asaj çka po ndodh në të vërtetë. Tregjet financiare e nisën vallen e vdekjes me krizën e kredive, e cila erdhi si pasojë e rritjes së madhe të çmimeve të pasurive të patundshme dhe e borxhit të ekonomive familjare. Pikërisht këto dy dukuri të fundit mund të krahasohen fare mirë me fitimet e mëdha të viteve '20, periudhë gjatë së cilës njerëzit shpenzonin me grushte sikur e nesërmja të mos ekzistonte.

Të gjithë nuk po e heqim nga goja fjalën recesion, që nuk përbën më një fakt të papritur dhe të befte. Por sa më shumë që shkrihet tregu financiar, aq më i madh është rreziku i një ekonomie problematike për vitet që do të vijnë. Kështu, për shembull, kriza bankare në Japoni doli të ishte shumë më e rëndë nga sa u parashikua fillimisht, pjesërisht për shkak të aseteve në të cilat ishin bazuar shumë banka kur dhanë kreditë, veçanërisht toka që humbën shumë në çmim. Çmimi i tokave në Japoni ka rreth 15 vjet që vazhdon të bjerë. (Adri Nurellari-Botuar tek gazeta "shqip"). Në këtë moment, është ende e vështirë që të çmosh

=====

se deri në çfarë mase kriza ka ndikuar në ekonominë dhe cilat do të jenë pasojat e krizës. Ajo çka dimë është se shumë banka do të duhet për shumë kohë ta reduktojnë dhënien e kredive, por për bankat që këtë funksion e kanë pasur primar, kjo do të thotë humbje e madhe

Kriza dhe refleksionet

Kriza e gloale ekonomike e kohëve të fundit po shërben si justifikim për të lëshuar një fushatë anembanë botës kundër ekonomisë të tregut dhe sipërmarrjes së lirë si dhe si një motiv për të justifikuar një ndërhyrje më të madhe të shtetit në ekonomi. Tregu i lirë po konsiderohet si përgjegjësi kryesor i kësaj krize ndërkohë që shkaktari kryesor ka qenë në fakt ndërhyrja e qeverisë në ekonomi. Kuptohet që babëzia ka luajtur rolin e vetë në këtë situatë dhe shumë bankierë e panë mbështetjen e shtetit si dritë të gjelbër për të abuzuar akoma më tepër duke dhënë kredi bujare për shtëpi për individë që nuk kishin kolateral apo të ardhura të mjaftueshme. Kriza e tanishme, si dhe ajo e vitit 1929, filloi në fushën financiare (në Wall Street) dhe në shtetin më të fuqishëm të botës. (Sipas vlerësimeve të FMN, ShBA ze vendin e parë me 23.6% të GDP botërore për 2008, pasuar nga Japonia me 8.0%, Kina 7.1 %, Gjermania 6 % etj).

Kjo krizë u përhap në të gjitha vendet, sidomos në ato të zhvilluara, dhe u shndrrua shpejt në një krizë ekonomike me pasoja të rënda sociale. Analistët venë dukje se, një vit pas fillimit, bota vlerësohet të ketë humbur një pasuri prej 15 trilion \$ (10.3 trilion euro) .

Madje, shtete si Islanda por dhe Hungaria e Letonia, shkuan në buzë të greminës. (SPIEGEL, 7.9.2009). Sipas parashikimeve më të fundit të FMN, (tetor 2009), GDP botërore pritet të bjerë 1.1 për qind këtë vit.

- Më e thellë rënia do të jetë në vendet më të zhvilluara : 3.4 %;
- në Japoni 5.4 %,
- në Gjermani 5,3 %,
- në Itali 5.1 %,
- në Britani 4.4 %,
- në Spanjë 3.8 %,
- në ShBA 2.7 %,
- në Francë, 2.4 %

Rënia ekonomike po shoqërohet me rritjen e shkallës të papunësisë:

- në ShBA 9.3 % më 2009 dhe 10.1 % më 2010 kurse
- në vendet e eurozonës përkatësisht 9.9 % dhe 11.7 %.

Miliona amerikanë humbën shtëpitë e tyre nga piramidat e hipotekave dhe miliona të tjerëve i'u ra vlera e tyre. Gjatë kësaj krize dolën në pah skemat financiare mashtruese të tipit "Ponzi" (1920). Bernard Madoff, ish kryetar i bordit të Bursës NASDAQ të Nju Jorkut për dekada kishte ngritur një piramidë gjigande ku 15 400 investues humbën 65 miliard usd!

Krahasuar me Depresionin e Madh kjo krizë ka si veçori kryesore se bota ndodhet tani në fazën e globalizmit, ndërvarësisë ekonomike, zhvillimit të

teknologjisë dhe internetit, për rjedhojë dhe masat për kapërximin e saj parashikohet të jenë më efektive.

Po cilat janë shkaqet apo rrënjët e krizës? Sigurisht ato janë të shumta dhe të ndryshme. Në këtë shkrim po sjellim në vëmendje kryesisht opinionet e disa fituesve të Çmimit Nobel në Ekonomi, si Paul Krugman (2008), Jozef E. Stiglitz (2001, Amartia Sen (1998), si dhe të ndonjë personaliteti të rëndësishëm botëror

Politikat financiare, gabime dhe pasojat

Në mjaft shkrime të kohëve të fundit nobelistët e cituar konvergojnë në mendimin se rrënjët dhe shkaqet e krizës së tanishme lidhen me politikat e gabuara të ndjekura në ShBA dhe në vende të tjera të zhvilluara në drejtimin e ekonomisë.

Një ndikim të ndjeshëm kanë dhënë sidomos teoritë dhe politikat liberale dhe monetariste të tipit laissez-faire, që i japin përparësi funksionimit automatik të tregjeve tregut, si vetë-korrigjues dhe vetë-rregullues dhe që nënvleftësojnë rregullimet qeveritare. Ato u përpunuan nga M. Fridman, lider i Shkollës Ekonomike të Çikagos në vitet '70, dhe u jetësuan në qeverisjen e R. Reganit, M. Theçerit etj. në vitet '80, e më vonë.



Këto teori sfiduan ato të J.M.Keynes (1883-1946), (ekonomist i britanik, i njohur dhe si themelues i makroekonomisë moderne), i cili përpunoi politikat qeveritare të zbutjes të efekteve të cikleve të biznesit, reçesioneve dhe depresioneve përmes masave fiskale dhe monetare. Lindja e ekonomisë si shkencë- shkruan Krugman-daton me veprën klasike të

Adam Smithit “Pasuria e Kombeve” më 1776. Për mëse 160 vjet u zhvillua një teori ekonomike, mesazhi kryesor i së cilës ishte: Beso tregun! Ekonomistët e pranuan tregun bashkë me rastet e dështimit, ku më i rëndësishmi është ai i “përrjashtimeve”...Thelbi i ekonomisë “neoklasike” ishte gjithashtu besimi në një sistem tregu

Por Depresioni i Madh i 1929 e zbehu këtë besim. Pas kësaj, shumica e ekonomistëve u përqëndruan në analizat e Kejnsit për atë çfarë kishte ndodhur dhe në rrugë-zgjidhjet për depresionet e ardhëshme, të cilat ai i kishte përmbledhur në vitin 1936 në veprën e tij, “Teoria e Përgjithëshme e Punësimit, Interesave dhe Parasë”. Kejnsi kundërshtoi mendimin se ekonomitë e tregut të lirë mund të vetëfunksionojnë, duke shprehur mosbesim në mënyrë të veçantë

=====

për tregjet financiare. Ai bëri thirrje për ndërhyrje aktive qeveritare –për të nxjerrë më shumë para gjatë krizave dhe, nëse është e nevojshme, për të luftuar papunësinë - duke shpenzuar më shumë në punët publike. Kejnisi argumentoi se jo vetëm që tregjet nuk janë vetë-korrigjues, por që në një krizë ekonomike, politika monetare mund të mos jetë efektive. (Krugman, 2 shtator 2009.)

Në këtë linjë është edhe A.Sen kur analizon se “kriza e tanishme ekonomike, pjesërisht është shkaktuar nga një mbivlerësim i madh i veprimit të proceseve të tregut dhe është acaruar nga ankthi dhe mungesa e besimit në tregun financiar dhe në bizneset në përgjithësi. Roli mbikqyrës i qeverisë në ShBA ka qënë reduktuar ndjeshëm, i ushqyer nga një besim në rritje për natyrën vetërregulluese të ekonomisë së tregut (Sen, 26 mars 2009).

Duke analizuar shkaqet e kësaj krize në një rrafsh më konkret por që nxiten nga teori liberale, Presidenti B.Obama në fjalën e tij më 14 prill 2009 në Universitetin Georgetown Washington, thekson se ky recesion, ndryshe nga të mëparshmit “ nuk erdhi si rjedhojë e një rënie normale të ciklit të biznesit. Ai u shkaktua nga një furtunë e vërtetë e papërgjegjshmërisë vendimarrëse që shtrihet nga Wall Street, në Washington në Main Street.”

Teoria e Kejnisi –Rikthehet

Nga Depresioni i Madh kemi mësuar se tregjet nuk janë vetë-rregulluese thekson Siglitz. Por këto mësimë sikur filluan të harrohen këto tre dekadat e fundit. Sistemi financiar amerikan ka ndryshuar thellë që nga vitet 1930. Shumë nga bankat e mëdha lëvizën nga “huadhënia” për bizneset në “lëvizjen e bizneseve .” Ato u fokusuan në blerjen e aseteve, rietiketimin dhe shitjen e tyre, duke treguar paaftësi në vlerësimin e riskut dhe analizën e vlefshmërisë të kredisë.

Ai shton se bota në këto dekadat e fundit është joshur pas idesë të bazuar në nocionin fundamentalist se tregjet janë vetë-korrigjues, i shpërndajnë burimet në mënyrë eficiente, dhe u shërbejnë mirë interesave publike. “Ka qënë ky fundamentalizmi i tregut që shtroi Theçerizmi, Reganomia, dhe i ashtuquajtur i “Konsensusi i Uashingtonit”, (me këtë ai ka parasysh politikën ekonomike që kanë ndjekur institucionet financiare ndërkombëtare), në favor të privatizimit, liberalizimit dhe pavarësisë të bankave qendrore duke u fokusuar posaçërisht mbi inflacionin. Mbrojtësit e fundamentalizmit të tregut -shton ai- duan ta çvendosin përgjegjësinë nga dështimi i tregut në dështimin e qeverisë. Por kjo nuk i ndryshon faktet: bankat e ShBA keqmenaxhuan riskun, ndërsa qeveria u jep atyre miliarda usd si kompensim. (Stiglitz, korrik 2008) .

Mirëpo tani, jemi kthyer të gjithë kejnsonianistë -shprehet jo pa nënkuptim- Stiglitz. Madje edhe të djathtët në Shtetet e Bashkuara i janë bashkuar kampit kejnsonianist me entuziazëm të shfrenuar. Për këdo nga ne që pretendon për disa lidhje me traditat kejsianiste, ky është një moment kthese, pasi ka qënë shmangur, për më shumë se tri dekada. Ajo që po ndodh tani përbën një triumf të arsyes përmbi ideologjitë dhe interesat. (Stiglitz, dhjetor 2008).

Pas fillimit të krizës dhe në fund të mandatit, Presidenti G W Bush duket më realist për rolin e tregut. Në Samitin për Bashkëpunimin Ekonomik Azi-Paqësor në Lima më 22 nëntor 2008 z. Bush pranoi se sistemi i tregut të lirë nuk është perfekt dhe se ai “mund të jetë subjekt i teprimeve dhe abuzimeve. Siç kemi parë këto muajtë e fundit, ka periudha kur ndërhyrja qeveritare është thelbësore për të rivënë në punë tregjet dhe për të mbrojtur shëndetin e përgjithshëm ekonomik.”

A.Greenspan, (kryetar i Rezervës Federale në vitet 1987-2006, i caktuar fillimisht nga Regani por që vazhdoi edhe ne administratat e tre presidentëve të tjerë), u shpreh para një komisioni të Kongresit më 23 tetor 2008 se kishte pasur shumë besim në fuqitë vetë-korrigjuese të tregut të lirë dhe se kishte dështuar të parashikonte fuqitë vet-shkatërruese të huave të ekzagjeruara të hipotekave (nytimes.com.24.10.2008).

Kapitalizëm me rregulla dhe moral

Çështja që shtrohet me shumë forcë tani lidhet me natyrën e kapitalizmit dhe me nevojën ose jo të ndryshimit të saj-shkruan A.Sen. Disa mbrojtës të kapitalizmit të shpenguar, që kundërshtojnë ndryshimin, shprehen se kapitalizmi po fajësohet shumë për problemet ekonomike afatshkurtëra- probleme që ata i a hedhin qeverisjes së keqe (për shembull administratës të Bushit) dhe sjelljes së keqe të disa individëve (ose si John McCain e përshkroi gjatë fushatës presidenciale- "babëzi e Wall Street"). Por të tjerë, shohin difekte vërtet serioze në rregullat ekzistuese ekonomike dhe duan t'i ndreqin ato, duke kërkuar një qasje alternative që ka filluar të quhet -" kapitalizëm i ri."

Mendimi për një “kapitalizëm të ri” u hodh në Simpoziumin e mbajtur në Paris më 8 janar 2009. Në fjalën e tij, presidenti francez N.Sarkozy e cilësoi kapitalizmin financiar bazuar në spekulimin "një sistem imoral " që ka “prishur logjikën e kapitalizmit”, kancelarja gjermane A.Merkel ngriti shqetësimin se sistemi "nuk mund të vazhdojë kështu siç është" dhe propozoi “për tregje më të rregulluara” kurse ish kryeministrit britanik T.Blair u shpreh për një rend të ri financiar bazuar në "vlerat ndryshe nga një fitim maksimal afat-shkurtër."

Ekonomisti M. Yunus që drejton një bankë të madhe mikrokrediti në Bangladesh, (fitues i Çmimit Nobel për Paqe për vitin 2006) shprehet se ‘dora e padukëshme’ e Adam Smithit, e cila mendohej se i zgjidh të gjitha problemet e tregut nuk ekziston. Ajo ç’ka po përjetojmë është një dështim dramatik i tregjeve. Duket qartë se tregu nuk është në gjëndje të zgjidhë të gjitha problemet vetë prandaj njerëzit tani vrapojnë tek qeveritë për të kërkuar ndihmë emergjente. Kapitalizmi, me të gjitha mekanizmat e tregut, do të mbijetojë- nuk është kjo çështja. Por nuk duhet të ketë vetëm një motiv për të bërë biznes siç është maksimizimi i fitimit; e nevojshme është të përfshihen edhe nxitësa sociale.”(SPIEGEL ONLINE International. 10.10.2008.)

Duke lënë mënjanë teoritë e “mosndërhyrjes qeveritare”, duke mos i besuar rolit vetë-rregullues të tregut, qeveritë kanë marrë masa të

=====
 jashtëzakonshme duke injektuar qindra miliard usd në banka dhe institucione të tjera për t'i shpëtuar nga falimentimi dhe për të frenuar krizën ekonomike. Madje nuk kanë ngurruar të ndërhyjnë edhe drejtpërdrejt për të mbrojtur industritë kombëtare si psh ato të makinave në ShBA, Gjermani etj.

Të ndërgjegjshëm se masat rregulluese në nivel shtetëror nuk mjaftojnë, janë hedhur në lëvizje dhe aktivitet të plotë edhe organizmat dhe institucionet ndërkombëtare si G8, G20, FMN, BB etj). Mjaft frytdhënës dhe tej parashikimeve rezultoi sidomos takimi i G20 i zhvilluar në Londër më 3 prill 2009, ku liderët ranë dakord t'i akordojnë FMN 1.1 trilion usd për të mbështetur një program për kreditimin, rritjen dhe punësimin në ekonominë botërore.

Duke konfirmuar efektivitetin e këtyre masave, shtatë muaj më vonë, në Samitin e G20 në Pittsburgh (ShBA) më 24-25 shtator 2009 kreu i FMN, Strauss-Kahn u shpreh se bashkëpunimi i liderve duhet të vazhdojë për të mbështetur ringritjen ekonomike globale, pasi kjo është ende e pasigurtë. Prandaj-shtoi ai- është e parakohëshme të heqim dorë nga politikat monetare dhe fiskale rregulluese.

Përfundimi

Me qellimte perballimi të kësaj gjendjeje jo të mirë globale financiare, qeverit duhet të jenë të kujdesshme dhe të marrin masa urgjente. Qeveria duhet të lejonte tregun të bënte punën e vetë duke rihvendosur burimet nga sektorë jo-produktiv ose jo-efikas sikurse ishte ajo pjesë e sektorit bankar që u morr me kreditë për shtëpitë, drejt sektorëve të tjerë më produktiv. Pra duhet që ti jepej mundësi tregut që të normalizonte marrëdhënien midis kursimeve, huadhënies dhe produktivitetit. Mirëpo qeveritë në vend që të lejonte krasitjen e shëndetshme që do t'i bënte vetë tregu degëve të kalbura të ekonomisë, është duke e zgjatur (por jo duke eliminuar) kalbësinë. Sikurse thotë Daniel Mitchel i Cato Institute, tregu pa falimentim është si feja pa ferr. Tregu pa falimentimin është i gjymtuar dhe i çaktivizuar dhe nuk mund të bëjë funksiononin e vetë. Duke shtuar likuiditetin në treg shteti amerikan ka ndërmarrë një masë afatshkurtër që thjesht ka për të ndihmuar ato banka që kanë pasur dobësi në menaxhim si dhe ka për të nxitur inflacionin. Po të ndodhte krasitja aktivitetet dështake do të mbylleshin ato aktivitete që nuk rrinë dot në këmbë dhe që konsumatorët nuk i duan dhe fondet, burimet apo energjitë do të kalonin në aktivitete fitimprurëse. Mirëpo në vend që të lihen të falimentojnë institucionet financiare kanë abuzuar me situatën apo që kanë bërë zgjedhje gabuara në treg për të cilat duhet të mbajnë përgjegjësi, qeveria amerikane e më pas qeveritë e tjera u futën në lojë për të mbajtur në këmbë këta dështakë. Në vënd që qeveria të merrte përgjegjësitë që i takonin për krizën dhe të tërhiqej nga tregu qeveria bëri të kundërtën i futi akoma më keq duartë në ekonominë e tregut duke dyndur qindra miliarada të taksapaguesve. Mirëpo paraja në vetëvete nuk gjeneron pasuri po të kishte qenë e mundur do e kishim zhdukur varfërinë qëmoti.

Edhe pse Bankat ndërprejnë huadhënien ndaj njëra-tjetrës, duke pasur frikë se bilancet e tyre të mbushura me borxhe e "mbetje toksike" do të shpërthenin nga momenti në moment. Në këtë situatë ngurtësimi të likuiditetit, bankat qendrore nisën të pomponin para në të gjithë sistemin bankar dhe në shuma shumë të mëdha, e megjithatë zhblllokimi i situatës nuk ndodhi. E që do të thotë se Kriza është me serioze se sa parashikohej deri me tani.

Në perfundim du të atë paraqes edhe disa aksione konkrete të qeverive dhe BQ në tejkalimin e kësaj gjendje të emruar si Planë shpëtimi, Planë të shpëtimit të sektorit bankar të rrezikuar fillimisht u plasuan në SHBA dhe Evropë dhe në të shpeshtën e rasteve ka dy aktorë të mëdhenjë : - Qeveritë dhe Bankat qendrore.

Bankat qendrore po reagojnë në zbritjen e përqinjes së interesit të tyre si dhe në marrjen si garant të aktiveve të infektuara të bankave në vështirësi. Psh. Në tetor 2008, Fed dyfishoj nivelin e likuiditetit të vënë në dispozicion të bankave duke arritur shumën në 9000 miliard dollarë.

- Qeveria Amerikane plasoj Planin Paulson i cili plan parashikon blerjen e aktiveve të infektuara nga bankat e ndryshme në shumën prej 700 miliard dollarë.
- France : Shteti garanton të gjitha operacionet bankare në vlerë prej 320 miliard dollarë dhe ndihmon në kapitalizimin e bankave në vlerë prej 40 miliard dollarë.
- Gjermani : Shteti garanton operacionet bankare në vlerë prej 400 miliard dollarë dhe ndihmon në kapitalizimin e bankave prej 80 miliard dollarë.
- Britania e Madhe : Shteti garanton operacionet bankare në vlerën prej 320 miliard dollarë dhe ndihmon në kapitalizimin e bankave në vlerë prej 64 miliard dollarë.
- Zvicër : ndihmohtet në kapitalizimin e bankës prej 6 miliard frz. dhe blihen aktivet e infektuara prej 60 miliard frz.
- Indi: ndihmohet sektori bankar me 9 miliard dollarë
- Kinë: Ulet pëqindja e interesit.

Ateher parashtohet pyetja ligjike se kush fitoj dhe kushe humbi nga gjith kjo vorbull financiare. Në rend të parë fituan ata që edhe janë përgjegjësit kryesor të kësaj krize. E ata janë menagjerët e shumtë, bankjerët, ndermjetësuesit bankarë e financiare të cilët kjiuan produkte të lloj-llojshme të plasuar në bursat e njohuar me premtimin e fitimit joreal për financuesit duke siguruar për vetën e tyre fitimin e menjëhershëm mbi kapitalin e investuar nga të tjerët. Financuesit e mëdhenjë, spekulatorët e shumtë të tregut bursier duke vjelur fitimet e tyre të garantuara dhe duke lënë si pasojë rrëmujën e mëvonshme financiare. Vetëm rrogat dhe bonuset e menagjerëve të shumë të bankave silleshin në 500'000 deri në 50 milion dollarë vjetor, ndërsa rrogat e punëtorëve as për të siguruar jetesën normale të familjeve të tyre. Sipas revistës „Le Times“, vetëm 15000 familje amerikane fitojnë 5% të të ardhurave totale kombëtare

=====

amerikane - që është e barabartë me të ardhura prej 9.5 miliard dollarë për familje në vit. Në të njëjtën kohë aktualisht sot në botë 1.2 miliard njerëz jetojnë me më pak se 1 dollarë në ditë. Fituan bankat e mëdha të cilat me vite përvetësuan fitimin mbi investimet e realizuara për të vete dhe për të tjerët, ndërsa në rastin e tanishëm, investimet e tyre të pavlerë i bartën me mjeshtri në barrë të bugjetit shtetëror, gjegjësisht në barrën e qytetarëve të thjeshtë që nuk ka asnjë përgjegjësi në arrogancën bankare.

Po kush humbën,- kjo është ana tjetër e medaljese që kushtoj jo pak në gjithë botën. Ketu Humbën kryesisht bankat dhe financuast e ndryshëm që plasuan kursimet e tyre financiare në kërkim të një fitimi më të madh, një fitimi që u bë modë „e shkathtësisë dhe vigjilencës financiare Humbën fondacionet e ndryshme të fondeve pensionale, të cilat investuan në këto produkte financiare me shpresën e kapitalizimit më të madhe, për tu gjendur sot të rurdhura për humbjet e pasuara. Fat të njëjtë pësoj edhe Fondi Pensional i Kosovës për të cilin më në fund po flitet se vetëm gjatë vitit 2008 humbi rreth 100 milion euro nga tërësia e tij. Po nuk di pse nuk thuhet asgjë për parat e grumbulluara nga agjencia e Privatizimit të pasurisë së Kosovës, për të cilat thuhet se janë depozituara në një vend të sigurt, po nuk dihet se ku dhe sa është vlera reale e sotme e tyre. Humbi qytetari, humbën miliona familje të cilat tash dhe në të ardhmen do të bartin humbjet e mëdha financiare me kurrizin e tyre përmes zvoglimit të fuqisë blerëse dhe rritjes së tatimit që shteti do e bartë tek ta për të mbuluar rrezikun që shteti sot ka marrë mbi bankat për të ashtuquajtrua „produkte të infektuara financiare“. Bankierët dhe financierët kanë përvetësuar fitimet e tyre kolosale ndërsa Humbën mijëra të punësuar në ekonominë, pasojat e kësaj krize veç kanë filluar të ndihen, e sektori i dytë pas atij financiar është ai automobilistikë, ku shumica e prodhuesve automobilistik po kërkojnë ndihmën e shtetit dhe kanë ndërprerë përkohësisht prodhimin. Në vazhdim kriza do vazhdojë mbi sektorin e ndërtimtarisë, industrisë, hotelierisë dhe mbi gjithë ekonominë. Recesioni ka përfshirë në gjysmën e dytë të viti 2008 SHBA-në, Japoninë, Francën e edhe Gjermaninë, ndërsa parashikimi i depresionit të Bruto Produktit për vitin 2009-2010 do sillet në rreth -3 e -10%. Me këtë parashikim është evidente humbja e qindra mijëra vendeve të punës.

Si perfundim mbeshetur në të dhenat e FMN-së, humbja apo kostoja totale që do i kushtojë globit kjo krize do të arrijë deri në 4.1 trilionë Dollarë

Literatura dhe referenca

1. Civici, A “Kriza financiare ...apo globale?”, Tiranë, 2010
2. Paul Krugman Fitues i Çmimit NOBEL në Ekonomi (2008),
3. Jozef E. Stiglitz, Fitues i Çmimit NOBEL në Ekonomi (2001)
4. Amartia Sen Fitues i Çmimit NOBEL në Ekonomi (1998)
5. Beqa B, **KRIZA FINANCIARE GLOBALE : EFEKTET SHKATËRRUESE TË SAJ DHE E MAJTA**

6. Govori F.- Financë, - Prishtine2010
7. Nimani A.,- Politikat Financiare- Prishtinë 2010
8. SPIEGEL ONLINE International. 10.10.2008 dhe SPIEGEL, 17.9.2009
9. Nytimes.com.24.10.2008
10. A.Greenspan-kryetar i Rezervës Federale në vitet 1987-2006
11. Sen, 26 mars 2009.
12. M. Yunus fitues i Çmimit Nobel për Paqe për vitin 2006
Daniel Mitchel i Cato Institute, shkurt 2010
13. (Stiglitz, korrik 2008 dhe Stiglitz, dhjetor 2008).
14. Adri Nurellari-Botuar tek gazeta "shqip" Tirane 2010.
15. Ilić G., Reforme Evropske Unije – Institucionalni aspekti., Beograd 2004
16. Sadiku M., Transicioni dhe Reformat Institucionale në Kosovë, Riinvest, Prishtinë 2007
17. <http://www.evropaelire.org/content/article/2042938.html>
18. <http://www.telegrafi.com/?id=46&a=4272>
19. <http://www.setimes.com/cocoon/setimes/xhtml/sq/features/setimes/roundup/2008/10/10/roundup-bs-04>
20. <http://www.noa.al/index.php/ekonomi/90-ekonomi/987-raporti-i-ri-i-fmn->
21. http://www.bbc.co.uk/albanian/regionalnews/2008/11/081126_berzh_alban

KUD 33

OPTIMIZACIJA LOKACIJE POTROŠNJE PUTEM VORONOI DIAGRAMA

*Dr.sc. Asib Alihodžić,
Dr.sc. Almir Alihodžić,
Mr.sc. Adis Alihodžić,*

Abstrakt

Rad prikazuje lokacijske probleme optimizacije koji se mogu rešiti preko Voronoi dijagrama. Osam vrsta kontinuiranih lokacijskih problema optimizacije je formulisano, a ti problemi se rešavaju kroz obični Voronoi dijagram. Problemi o kojima će biti više reči u radu su sledeći: najudaljenije tačke Voronoi dijagrama, težinski dijagram Voronoi, dijagram mreže Voronoi, Voronoi dijagram s konveksnom udaljenošću funkcije, linija Voronoi dijagrama i dijagram polja Voronoi.

Ključne reči: voronoi model, voronoi dijagram, fortune's algoritam

Uvod

Pretpostavimo da se nalazimo u nekom regionu na kojem želimo da otvorimo super-market. Neka se u tom regionu nalazi sem niza drugih objekata(kuće, fabrike, bolnice, škole itd.) i niz gotovo istih mini-marketa koji će biti neposredni konkurenti tek novo-otvorenom super-marketu. Postavlja se pitanje, kako odabrati sigurnu lokaciju na tom regionu da bi ostvarili najveći profit? Da bi dali odgovor na ovo pitanje, najpre razmotrimo koje sve pretpostavke treba da ispunjava novi market :

1. Cena robe (usluge) mora biti **“gotovo”** ista kao i u svim obližnjim super-marketima;
2. Cena isporuke robe do željenog mesta jednaka je: cena robe + cena transporta robe;
3. Cena transportovanja do željenog mesta jednaka je: euklidska udaljenost od supermarketa do željenog mesta puta fiksna cena po jedinici udaljenosti ;
4. Potrošači pokušavaju da minimiziraju krajnju cenu za dobijanje robe(usluge).

Napomenimo da gore navedene pretpostavke često nisu zadovoljene.
Npr : roba može biti u nekom od mini-marketa jeftinija u odnosu na ostale,

zatim unutar regiona transportni troškovi od jednog mesta x do drugog mjesta y **gotovo** uvek ne predstavljaju linearnu euklidsku udaljenost :

$$Dist(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \text{ za } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ i } y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Glavni cilj teme koju obrađujemo baziraće se na tome kako da gornji model geometrijski interpretiramo. Gornje pretpostavke induciraju podelu područja na regione (regioni su trgovačka područja za neka mesta, gde bilo koji region sadrži tačno jedan mini-market za to mesto) tako da ljudi koji žive u istom regionu svi posećuju recimo isti mini-market. Naše pretpostavke impliciraju da ljudi kupuju robu u najbližem trgovačkom mestu što je i prirodno. Ovo znači da trgovačko područje za dato mesto (koje je fiksno) je bliže tom mestu nego bilo kojem drugom. Drugim rečima, osoba koja pripada tom mestu ne može biti bliža drugom trgovačkom području za drugo mesto.

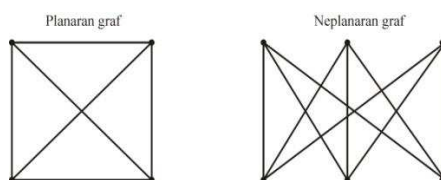
Model koji svakoj tački pridružuje najbliže mesto zove se **Voronoi model**. Podela inducirana ovim modelom zove se **Voronoi dijagram** od datih mesta.

1. Osnovne osobine Voronoi dijagrama

Definicija 1.1: Za graf $G = (V, E)$ kažemo da je planaran ili da se može smestiti u ravan, ako se isti može smestiti u ravan tako da se ivice seku samo u vrhovima.

Primer 1.1: Ilustracija planarnog grafa K_4 i neplanarnog grafa $K_{3,3}$.

Slika 1.1. Prikaz planarnog i neplanarnog grafa

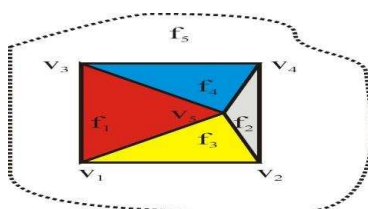


IZVOR: Proračun autora

Definicija 1.2: Region grafa $G = (V, E)$ u oznaci f je deo površi omeđen nekom konturom. Skup regija označavamo sa $F(G)$, gde je V skup svih vrhova, a E skup svih ivica.

Primer 1.2: Ovde je $F(G) = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$

Slika 1.2. Prikaz regiona kod planarnog grafa



IZVOR: Proračun autora

Definicija 1.3: Stepen vrha v grafa $G = (V, E)$ u oznaci $d(v)$ je broj grana incidentnih vrhu v .

Primer 1.3: $d(v_1) = 3; i = \overline{1,4}; d(v_5) = 4$

Lema 1.1: Za svaki graf $G = (V, E)$ vredi sledeća jednakost:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E|$$

Dokaz: Neka je M matrica incidencije od $G = (V, E)$, $|V| = n$ i $|E| = m$, gde je:

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij}, \quad a_{ij} \in \{0,1\}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je čvor } v_i \text{ incidentan ivici } e_j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Kod matrice M , čvorovi v_i su redovi ($i = \overline{1, n}$), a ivice e_j ($j = \overline{1, m}$) su kolone. Dobijamo:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}$$

No, svaka od ivica e_j ($j = \overline{1, m}$) incidentna je sa tačno dva čvora v_i i v_j . Otuda:

$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 2$, za $\forall j = \overline{1, m}$. Dakle,

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} = 2 \sum_{j=1}^m 1 = 2m$$

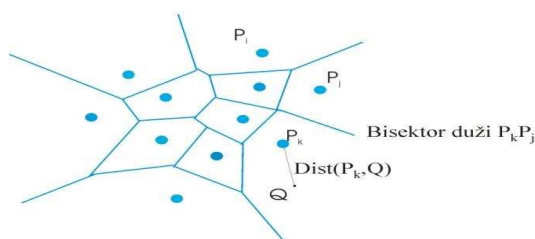
Definicija 1.4: Voronoi diagram od F ($F = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ -konačan niz od n - mesta) u oznaci $Vor(F)$ je podela ravni u n - regija tako da svakoj ćeliji odgovara

jedno mesto iz F sa osobinom da tačka Q leži u ćeliji kojoj je pridruženo mesto

$$P_k \Leftrightarrow \text{Dist}(Q, P_k) < \text{Dist}(Q, P_j), \text{ za } \forall P_j \in F, j \neq k.$$

Napomenimo da ćelija može biti poluravan ili neki konveksan poligon. Grafička ilustracija gore navedenog data je na sledećoj slici.

Slika 1.3. Prikaz udaljenosti tačke Q u odnosu na P_k



IZVOR: Proračun autora

Definicija 1.5: Bisektor $B(P_j, P_k)$ u ravni za mesta P_j i P_k je simetrala duži $P_j P_k$.

Bisektor B deli ravan na dve poluravni. Otvorenu poluravan koja sadrži P_j a ne

P_k označavaćemo sa $H(P_j, P_k)$, dok otvorenu poluravan koja sadrži P_k a ne sadrži

P_j označavaćemo sa $H(P_k, P_j)$. Ćeliju kojoj odgovara mesto P_k označavaćemo sa

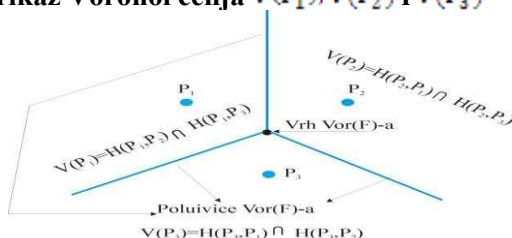
$V(P_k)$. Iz gornje definicije sledi: $R \in H(P_j, P_k) \Leftrightarrow \text{Dist}(P_j, R) < \text{Dist}(P_k, R)$.

Primedba 1.1: Primetimo da vredi sledeće: $V(P_i) = \bigcap_{1 \leq j \leq n} H(P_i, P_j)$, $i \neq j$.

Sledeća grafička ilustracija demonstrira ovu primedbu za $n=3$, tj. kada su

zadati tri mesta: P_1, P_2 i P_3 .

Slika 1.4 Prikaz Voronoi ćelija $V(P_1), V(P_2)$ i $V(P_3)$



IZVOR: Proračun autora

Dakle, svaka i -ta Voronoi ćelija $V(P_i)$ dobija se kao presek $n - 1$ poluravni.

Definicija 1.6: Područje F je konveksno ako za $\forall x_1, x_2 \in F$ i za $\forall \alpha \in [0,1]$ vektor

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in F.$$

Lema 1.2: Presek konveksnih skupova je konveksan skup.

Dokaz: Neka su A i B konveksni skupovi. Stavimo da je $C = A \cap B$ i pokažimo da je C konveksan. Odaberimo proizvoljno $x_1, x_2 \in C$ i $\alpha \in [0,1]$. Pokažimo da $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$. Kako su A i B konveksni i $x_1, x_2 \in C$ sledi $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in A$ i $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in B$ otuda $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$.

Definicija 1.7: Skup vektora $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ koji zadovoljavaju jednačinu $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$ zove se hiperravan.

Hiperravan deli prostor $\mathbb{R}^n$ na dva poluprostora, pa je poluprostor određen

nejednačinama oblika: $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$ i $\sum_{i=1}^n a_i x_i \geq b$

Lema 1.3: Hiperravan je konveksan skup.

Dokaz: Sledi odmah iz definicija 1.6 i 1.7.

Lema 2.4: Poluprostor je konveksan skup.

Dokaz: Sledi odmah iz definicije 1.6 i $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$ i $\sum_{i=1}^n a_i x_i \geq b$.

Kako su sve poluravni specijalan slučaj poluprostora za $n = 2$, sledi da su poluravni konveksne. Otuda i iz **leme 2** zaključujemo da je $V(P_i)$ konveksno poligonalno područje koje je ograničeno sa najviše $n - 1$ vrhova.

2. Osnovne teoreme o Voronoi dijagramu

Vidimo sa slike 1.3 i slike 1.4 da su neke ivice duži, a neke poluprave.

Specijalno za $n = 3$ imamo sve poluprave sa zajedničkim vrhom (videti slika 1.4). Sledeća teorema daje karakterizaciju gore izloženog.

Teorema 2.1: Neka je F skup od n –tačaka u ravni koje poistovećujemo sa n –mesta u $Vor(F)$ -u. Tada vredi :

i. Ako su tačke kolinearne onda $Vor(F)$ sadrži $n - 1$ paralelni pravi i n –ćelija.

ii. Ako tačke nisu kolinearne tada $Vor(F)$ je povezan graf i njegove ivice su ili duži ili poluprave.

Dokaz : Prvi deo dokaza sprovedemo koristeći zakon kontrapozicije.

Pretpostavimo da naša tvrdnja nije tačna, tj. da $Vor(F)$ ne sadrži $n - 1$ paralelni pravi ili ne sadrži n ćelija.

a. Neka $Vor(F)$ ne sadrži $n - 1$ paralelni pravi. Označimo prave $Vor(F)$ -a redom sa $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$. Tada postoji prava e_i koja seče ostale $e_j (j \neq i)$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $e_i = e_{n-1}$. Kako su e_i Voronoi prave sledi da je e_i simetrala duži $P_i P_{i+1}$. Specijalno e_{n-1} je simetrala duži $P_{n-1} P_n$. Prava e_{n-2} je simetrala duži $P_{n-2} P_{n-1}$. Odavde zaključujemo da je tačka preseka pravih e_{n-2} i e_{n-1} centar opisanog kruga nad trouglom $\Delta P_{n-2} P_{n-1} P_n$. Ovo znači da tačke P_{n-1} , P_{n-2} i P_n nisu kolinearne. Kontradikcija !

b. Neka $Vor(F)$ ne sadrži n ćelija. Neka je broj ćelija od $Vor(F)$ -a manji od n . Tada na osnovu **Dirichletov principa**⁴⁰ bar dva mesta pripadaju istoj ćeliji. Kontradikcija sa definicijom 1.4.

Drugi deo kao i prvi dokazaćemo zakonom kontrapozicije. Pretpostavimo da naša tvrdnja nije tačna. Tada $Vor(F)$ nije povezan ili ivice $Vor(F)$ -a nisu ni duži ni poluprave.

⁴⁰ Dirichletov princip glasi : Ako $n + 1$ bilo kako predmeta rasporedimo u n kutija , onda bar jedna kutija sadrži bar dva predmeta.

- =====
- c. Neka ivice $Vor(F)$ -a nisu ni duži ni poluprave. Neka je ivica e $Vor(F)$ -a prava koja leži na ivici od Voronoi ćelija $V(P_i)$ i $V(P_j)$. Po pretpostavci tačke $P_1, P_2, \dots, P_n$ nisu kolinearne. Možemo smatrati i smatraćemo da su tačke P_i, P_j i P_k temena nekog trougla i da je e simetrala duži $P_i P_j$. Neka simetrala duži $P_j P_k$ seče pravu e u nekoj tački M . Tada deo f prave e (f – je poluprava sa početnom tačkom M koja leži u unutrašnjosti od $H(P_k, P_j)$) ne može ležati na ivici od $V(P_j)$, jer za proizvoljnu tačku Z sa poluprave f vredi: $Dist(P_k, Z) < Dist(P_j, Z)$. No, ovo je kontradikcija sa pretpostavkom da e leži na ivici Voronoi ćelija $V(P_i)$ i $V(P_j)$.
- d. Neka $Vor(F)$ nije povezan graf. Tada postoji Voronoi ćelija $V(P_i)$ koja deli ravan na dva dela. Zbog toga što su ćelije $Vor(F)$ -a konveksni skupovi, $V(P_i)$ sadrži prugu ograničenu sa dve prave. Ovo je kontradikcija sa c).

Lema 2.1 (Euler-ova teorema): Povezan planaran graf sa n –vrhova, m –grana deli ravan na $f = m - n + 2$ regija.

Dokaz: Dokaz ćemo sprovesti indukcijom po broju grana m . Minimalan broj grana koji sadrži povezan graf sa n vrhova je $m = n - 1$. Tada je graf drvo. Pošto drvo ne ograničava ni jednu konačnu oblast, sledi da je $f = 1$. Pa, Euler-ova formula vredi za $m = n - 1$. Pretpostavimo sada da Euler-ova formula vredi za grafove sa $m - 1$ grana. Neka je $G = (V, E)$ graf sa m ($m > n - 1$) grana i neka je f broj oblasti za $G = (V, E)$. Tada graf sadrži bar jednu konturu. Posmatrajmo jednu granu e koja pripada nekoj konturi u grafu $G = (V, E)$. Ova grana je granica za dve oblasti, pa njenim udaljavanjem iz grafa dobijamo graf $G' = G - e$

sa $m - 1$ grana i $f - 1$ oblasti. Primenjujući induktivnu pretpostavku na G' dobijamo: $f - 1 = m - 1 - n + 2 \Rightarrow f = m - n + 2$. Time je lema dokazana.

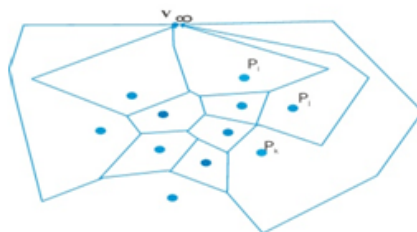
Teorema 2.2: Broj vrhova u $Vor(F)$ -u je najviše $2n - 5$, a broj ivica je najviše $3n - 6$. Ovde kao i ranije $F = \{P_1, P_2, \dots, P_{n-1}\}$, gde tačke P_i ($i = \overline{1, n}$) poistovećujemo sa mestima u ravni.

Dokaz: Ako su tačke kolinearne, onda je broj vrhova odnosno broj ivica jednak nuli, pa u ovom slučaju dokaz je trivijalan. Pretpostavimo da tačke nisu

kolinearne. Kako $Vor(F)$ ima beskonačne poluprave, nije moguće primeniti *Euler-ovu teoremu*. Stoga, dodaćemo jedan vrh v_∞ negde u beskonačnosti i

spojiti sve beskonačne poluprave $Vor(F)$ -a sa ovim vrhom. Dobiven graf označimo sa $G = (V, E)$ (videti sliku 2.1).

Slika 2.1 Prikaz povezanog planarnog grafa $G = (V, E)$



IZVOR: Proračun autora

Svakom mestu P_i ($i = \overline{1, n}$) pridružena je jeddna regija f u povezanom planarnom grafu $G = (V, E)$. Stoga $f = n$. Primenjujući *Euler-ovu teoremu* na $G = (V, E)$ dobijamo: $f = |E(G)| - |V(G)| + 2$. Na osnovu leme 1.1 imamo: $2|E| = \sum_{v \in V(G)} d(v)$. Za $n \geq 3$ svaki vrh $v \in V(G)$ ima stepen najmanje tri, jer je svaki $v \in V(G)$ dobiven kao presek tri bisektora. Otuda sledi: $2|E| = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 3|V(G)| = 3|n_v + 1|$, gde je n_v -broj vrhova u $Vor(F)$ -u.

Sada konačno imamo: $2n = 2(2 + |E| - n_v - 1) \geq 5 + n_v$. Dakle, $n_v \leq 2n - 5$.

Sada iz: $|E(G)| = n + n_v + 1 \leq n - 1 + 2n - 5 = 3n - 6 \Rightarrow |E(G)| \leq 3n - 6$.
Ovim je teorema dokazana.

Napomena 2.1: Kao što znamo ivice su delovi bisektora, a vrhovi su presečne tačke bisektora. Kako svi bisektori ne definišu ivice $Vor(F)$ -a, niti svi preseki bisektora ne definišu vrhove $Vor(F)$ -a, teorema 2.3 daće karakterizaciju tih slučajeva.

Definicija 2.1: Najveći prazan krug sa centrom u tački Q u oznaci $C_F(Q)$ je krug koji ne sadrži nijedno mesto $P_i \in F$ u svojoj unutrašnjosti.

Teorema 2.3: Neka je F skup od n tačaka u ravni koje poistovećujemo sa n mesta u $Vor(F)$ -u. Tada vredi:

- Tačka Q je vrh $Vor(F)$ -a $\Leftrightarrow C_F(Q)$ sadrži bar tri mesta(tačke) na svom rubu.
- Bisektor između mesta P_i i P_j definiše neku ivicu $Vor(F)$ -a $\Leftrightarrow$ postoji neka tačka Q tako da $C_F(Q)$ sadrži tačno dva mesta P_i i P_j na svom rubu.

Dokaz: a) ($\Leftarrow$) Pretpostavimo da $C_F(Q)$ sadrži tri mesta (tačke) na svom rubu.

Neka su ta mesta P_i, P_j, P_k redom. Tada su ta mesta temena trougla $\Delta P_i P_j P_k$ oko koga je opisan krug $C_F(Q)$. Dakle, Q je tačka preseka simetrala stranica datog trougla. Kako je $Dist(Q, P_i) = Dist(Q, P_j) = Dist(Q, P_k) = r$ (r – poluprečnik kruga $C_F(Q)$) sledi da Q leži na rubu svake Voronoi ćelije $V(P_i), V(P_j), V(P_k)$.

Stoga je Q vrh $Vor(F)$ -a.

($\Rightarrow$) Neka je tačka Q vrh $Vor(F)$ -a. Tada je Q incidentan sa barem tri ivice $Vor(F)$ -a i sem toga sa barem tri Voronoi ćelije $V(P_i), V(P_j), V(P_k)$. To znači da

vrh Q mora da je jednako udaljen od mesta P_i, P_j, P_k . Tačke P_i, P_j, P_k jednoznačno određuju krug $C(Q)$ sa centrom u Q . Pokažimo da je krug $C(Q)$ isto što i $C_F(Q)$. Pretpostavimo suprotno, tj. $C(Q)$ sadrži mesto P_i u svojoj unutrašnjosti. Tada tačka Q nije centar četverougla opisanog oko temena P_i, P_j, P_k, P_i . Otuda, Voronoi ćelije $V(P_i), V(P_j), V(P_k)$ ne mogu se susresti u Q . Kontradikcija!. Dakle, $C_F(Q)$ sadrži bar tri tačke na svom rubu.

b) ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da postoji tačka Q u ravni tako da $C_F(Q)$ sadrži tačno dva mesta P_i, P_j na svom rubu. To znači da $\text{Dist}(Q, P_i) = \text{Dist}(Q, P_j) < \text{Dist}(Q, P_k)$, gdje $k = \overline{1, n}$ i $k \neq j$. Ovo dalje znači da Q leži na simetrali duži $P_i P_j$. Tada je Q vrh ili Q leži na ivici od $\text{Vor}(F)$ -a. Prvi deo ove teoreme a) implicira da Q ne može biti vrh. Otuda Q mora ležati na ivici od $\text{Vor}(F)$ -a.

($\Rightarrow$) Neka bisektor za mesta P_i i P_j definiše Voronoi ivicu. Sada najveći prazan krug sa centrom u Q (Q -proizvoljna tačka na ivici od $\text{Vor}(F)$ -a) mora sadržavati P_i i P_j na svom rubu i nijedno više mesto. Ako bi $C_F(Q)$ sadržavao još neko mjesto P_k na svom rubu, tada bi Q na osnovu prvog dela teoreme a) bio vrh. No, kako je svaki vrh incidentan sa najmanje tri Voronoi ivice, sledi Q je incidentan sa barem tri ivice, što je kontradikcija sa izborom tačke Q .

“Computational Geometry in C, Cambridge”, University Press.